

VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA STRUKOVNIH STUDIJA U NIŠU

studijski programi:
DRUMSKI SAOBRAĆAJ, INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO

MEHANIKA 2

(KINEMATIKA I DINAMIKA)

KINEMATIKA: PREDAVANJE BR.1

Predavač: mr Boban Cvetanović

SADRŽAJ PREDAVANJA:

- Zadatak, uloga i podela kinematike
- Kinematika tačke
- Pravolinijsko kretanje tačke
 - jednoliko
 - promenljivo
- Kinematički dijagrami

1. UVOD

1.1. Zadatak i uloga kinematike

Kinematika je deo mehanike u kojem se proučavaju geometrijska svojstva kretanja tela pri čemu se ne uzimaju u obzir njihove mase i sile koje deluju na tela.

Kinematika je dobila naziv po grčkoj reči *kinema* što znači kretanje.

Ovaj deo mehanike predstavlja uvod u dinamiku, a osim teorijskog ima i praktični značaj pri proučavanju kretanja mehanizama i mašina.

Najbliža nauka kinematici je geometrija jer se ona bavi proučavanjem prostora, a kinematika pored prostora uzima u obzir i vreme kao fizičku veličinu.

Sva proučavanja u kinematici zasnivaju se na geometrijskim aksiomama (ne uvode se dodatne aksiome) pa se često kinematika naziva i *geometrija kretanja*.

Osnovni zadatak kinematike je:

- **određivanje kinematičkih veličina koje karakterišu kretanje posmatranog tela kao celine**
- **određivanje kretanja svake tačke tog tela posebno**

1.2. Kretanje, prostor i vreme

Mehaničko kretanje je promena položaja jednog tela u odnosu na drugo telo u prostoru u toku nekog vremena.

Kretanje može biti: ***apsolutno i relativno***.

Apsolutno kretanje je kretanje posmatranog tela u odnosu na telo za koje se kaže da je u stanju mirovanja.

Relativno kretanje je kretanje posmatranog tela u odnosu na telo koje se takođe kreće.

Prostor u mehanici je trodimenzionalan i za njega se vezuje veličina koju zovemo **dužina**. Osnovna jedinica za dužinu je **metar**.

Vreme se u mehanici smatra univerzalnim jer teče (prolazi) na isti način u svim koordinatnim sistemima. To je nezavisno promenljiva veličina, a sve ostale veličine u kimematici se posmatraju u zavisnosti od vremena. Osnovna jedinica za vreme je **sekunda**.

1.3. Oblici geometrijskih tela

Sva tela u prirodi su promenljiva pod uticajem raznih uzroka (sila, pritisak, temperatura...), a da bi se lakše definisala i proučavala uvodi se pojam krutog tela.

Kruto telo je telo kod koga se rastojanje između dve bilo koje tačke tela pri kretanju ne menja.

Ono se javlja u vidu:

- 1. Linije** (štapa)-dimenzije poprečnog preseka su male u odnosu na dužinu
- 2. Ravni** (ploče) – jedna dimenzija je mala u odnosu na druge dve.
- 3. Tela** – sve tri dimenzije tela su istog reda veličine

Za lakše rešavanje kinematičkih problema uvodi se i pojam tačke.

Tačka je telo čije su dimenzije mogu zanemariti u odnosu na veličinu puta koji telo pri kretanju prelazi.

1.4. Podela kinematike

Vrši se s obzirom na geometrijski oblik tela čije se kretanje proučava. Deli se na:

- **Kinematiku tačke**
- **Kinematiku krutog tela**

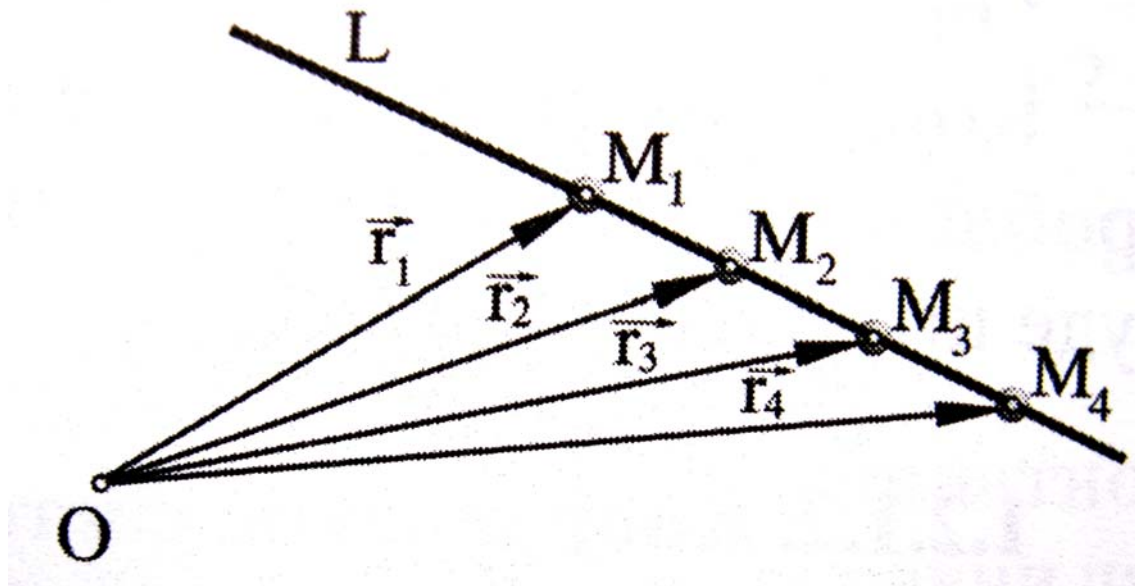
2. KINEMATIKA TAČKE

2.1. *Određivanje položaja tačke u prostoru*

U geometriji su poznata dva načina:

1. **Vektorski**
2. **Analitički**

U vektorskoj geometriji položaj tačke u prostoru određuje se u odnosu na jednu stalnu tačku, jednim vektorom koji se naziva vektor položaja ili radijus vektor. Promenu položaja tačke M prati i promena vektora položaja



U analitičkoj geometriji položaj tačke u prostoru određuje se primenom metoda koordinata tj. skupa brojeva koji potpuno određuju položaj tačke u prostoru. Prostor u koji se uvode ovi brojevi naziva se koordinatni sistem.

2.2. Sistem referencije

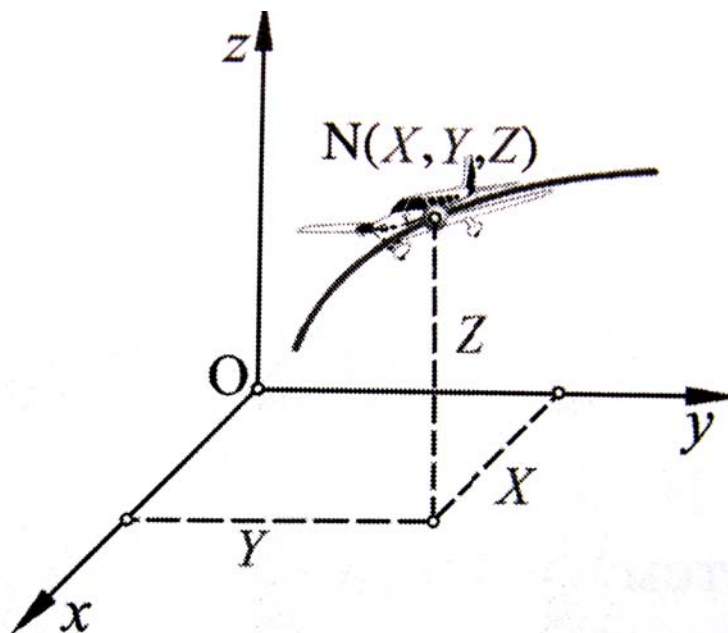
Položaj tačke ili tela uvek se određuje u odnosu na neko drugo telo.

Referentno (uporedno) telo je telo u odnosu na koje se određuje kretanje posmatranog tela.

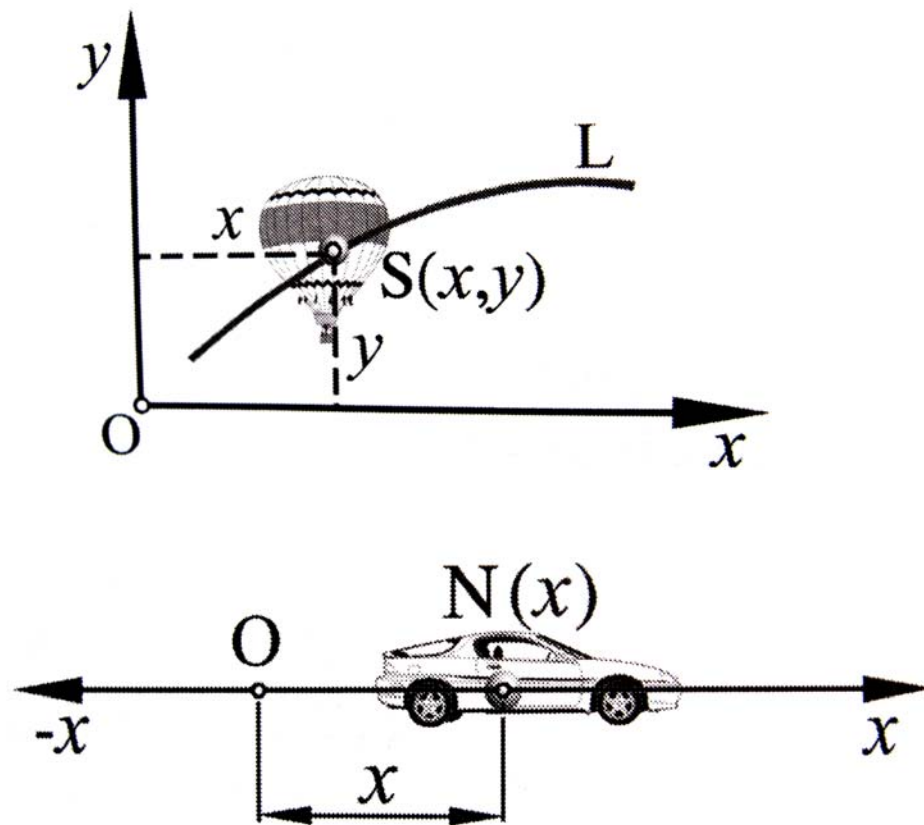
Sistem referencije je koordinatni sistem koji se vezuje za referentno telo. Najčešće se primenjuje Dekartov pravougli, a osim njega koriste se i polarno-cilindrični, sferni, prirodni itd.

a) Dekartov pravougli koordinatni sistem

Čine ga tri međusobno upravne, orijentisane prave (ose) koje prolaze kroz nepomičnu tačku O i ne leže u istoj ravni. Položaj neke tačke N u prostoru određen je sa tri koordinate x, y i z pri čemu se pri kretanju tačke njene koordinate menjaju sa vremenom. Ako se znaju zakonitosti po kojima se menjaju koordinate tačke sa promenom vremena može se odrediti položaj tačke u svakom trenutku vremena u odnosu na izabrani koordinatni sistem. Te zakonitosti se nazivaju konačne j-ne kretanja tačke i uspostavljaju zavisnost između promene koordinata i vremena: $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$

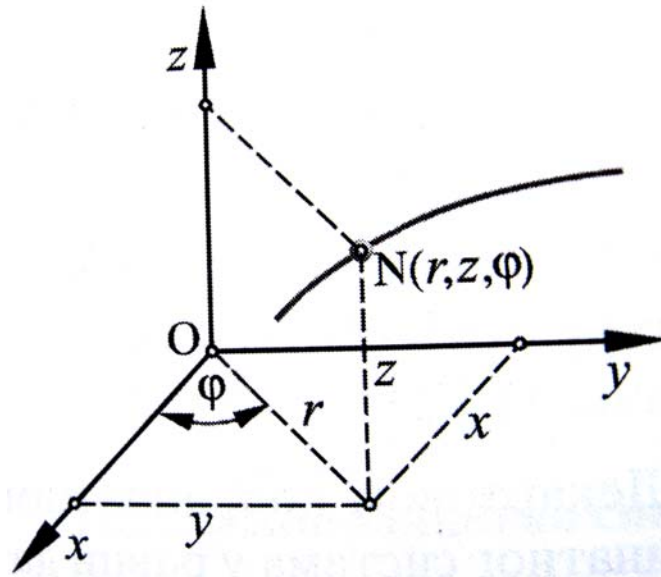


Za određivanje položaja tačke koja se kreće u ravni, u svakom trenutku vremena, dovoljne su dve j-ne kretanja $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, a kretanje se posmatra u Dekartovom sistemu u ravni. Ako se tačka kreće pravolinijski njeno kretanje se posmatra u pravcu jedne koordinatne ose, a za opisivanje položaja tačke u svakom trenutku dovoljna je jedna j-na $x=f(t)$



b) Polarno-cilindrični koordinatni sistem

Položaj tačke u ovom sistemu određuje se **potegom r , uglom φ i ordinatom z .**



Položaj pokretne tačke u bilo kom trenutku vremena određuje se takođe jednačinama kretanja:

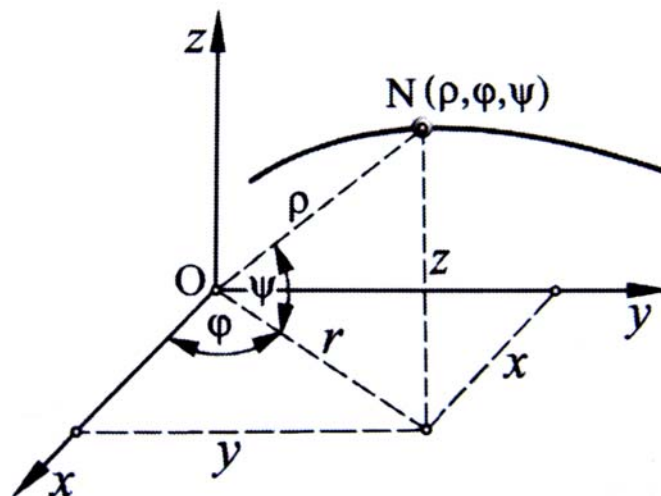
$$r=f_1(t), \quad \varphi=f_2(t), \quad z=f_3(t)$$

Veza između Dekartovih koordinata i polarno-cilindričnih koordinata izražava se:

$$x=r \cdot \cos\varphi, \quad y=r \cdot \sin\varphi, \quad z=z$$

c) *Sferni koordinatni sistem*

U ovom sistemu položaj tačke se određuje **polarnim potegom ρ , uglom φ i uglom ψ .**



Položaj pokretne tačke u bilo kom trenutku vremena određuje se takođe jednačinama kretanja:

$$\rho = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t), \quad \psi = f_3(t)$$

Veza između Dekartovih koordinata i sfernih koordinata izražava se:

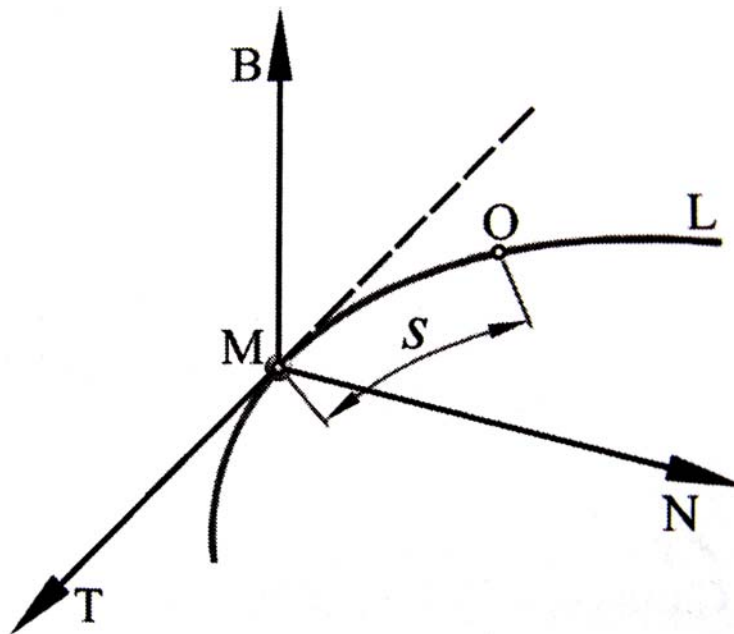
$$x = \rho \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi, \quad y = r \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi, \quad z = \rho \cdot \sin \psi$$

Veza između polarno-cilindričnih i sfernih koordinata izražava se:

$$r = \rho \cdot \cos \psi, \quad \varphi = \varphi, \quad z = \rho \cdot \sin \psi$$

d) Prirodni koordinatni sistem

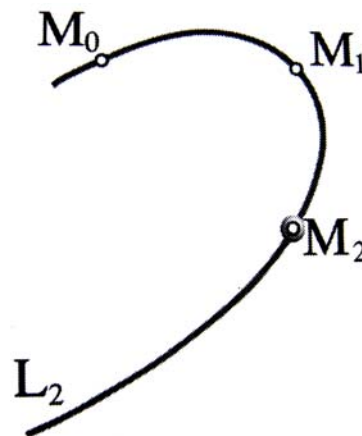
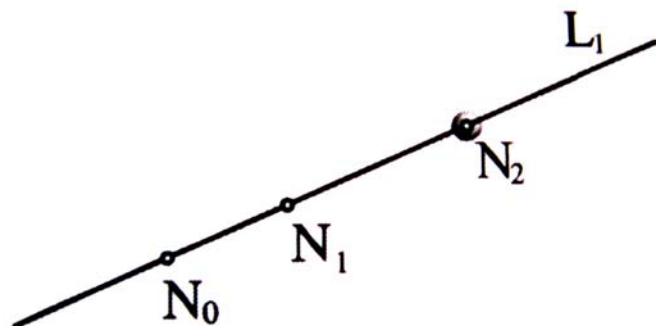
Čine ga tri međusobno upravne koordinatne ose koje ne leže u istoj ravni. To su prirodne koordinatne ose tangenta (T), glavna normala (N) i binormala (B).



Prirodni koordinatni sistem je pokretan, tj. vezuje se za posmatranu tačku.

Definicije osnovnih pojmova u kinematici

1. **Putanja (trajektorija)** je neprekidna linija koju tačka opisuje pri svom kretanju i prema obliku mogu biti pravolinijska i krivolinijska.



2. **Početni položaj tačke** je položaj na putanji u trenutku početka merenja vremena (N_0-t_0).
3. **Put (s)** je deo putanje koji tačka pređe u toku određenog vremena.
4. **Zakon puta** je jednačina kojom se uspostavlja zavisnost između pređenog puta i proteklog vremena $s=f(t)$.

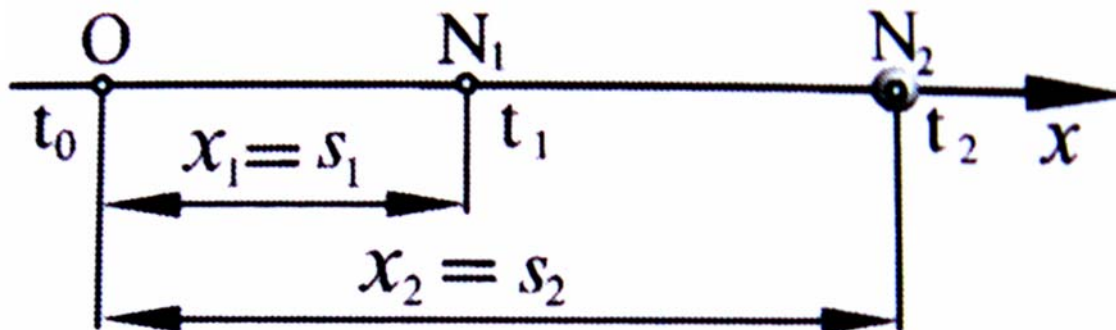
Zakon puta ne predstavlja j-nu putanje već samo način na koji se tačka kreće po toj putanji.

2.3. Pravolinijsko kretanje tačke

To je kretanje pri kojem je putanja prava linija, a j-na kretanja tačke može da se napiše kao $x=f(t)$.

2.3.1. Brzina pravolinijskog kretanja tačke

Posmatramo pređeni put tačke u određenom vremenskom periodu



Za vremenski period $\Delta t = t_2 - t_1$ tačka je prešla neki put $\Delta s = s_2 - s_1$

Srednja brzina kretanja tačke je odnos pređenog puta Δs i odgovarajućeg vremenskog perioda Δt : $v_{sr} = \Delta s / \Delta t$.

Ako vremenski interval Δt teži nuli dobija se granična veličina koja se naziva trenutna brzina ili kraće **brzina** (*v-velocitas*). To je vektorska veličina, a osnovna jedinica je m/s ($1\text{m/s} = 3,6\text{km/h}$)

- Ako se brzina kretanja ne menja (**$v = \text{const.}$**) radi se o **ravnomernom (jednolikom)** kretanju tačke
- Ako se brzina kretanja menja (**$v \neq \text{const.}$**) radi se o **promenljivom (nejednolikom)** kretanju tačke

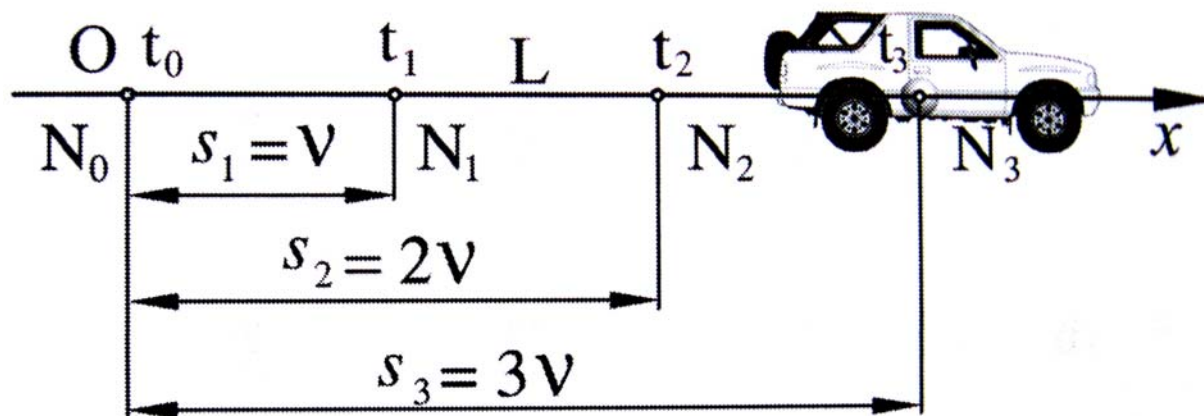
Napomena: Ukoliko se pređeni putevi i vremena ne posmatraju u odnosu na početnu tačku, već su oni dati za pojedine deonice onda se srednja brzina računa kao:

$$v_{sr} = \Sigma s_i / \Sigma t_i = s_1 + s_2 + \dots + s_n / t_1 + t_2 + \dots + t_n$$



2.3.2. Jednoliko pravolinijsko kretanje tačke

To je kretanje tačke po putanji oblika prave linije pri kojem tačka u jednakim vremenskim intervalima prelazi jednake puteve. Brzina ovog kretanja ne zavisi od vremena i ima stalnu vrednost $v = \text{const.}$



Pređeni put tačke N posle t sekundi kretanja je: **$s = v \cdot t$** (ukoliko je tačka imala neki početni pređeni put s_0 onda je **$s = s_0 + v \cdot t$**).

Osnovne kinematičke j-ne jednolikog pravolinijskog kretanja tačke su:

$$s = v \cdot t, \quad v = s/t, \quad t = s/v$$

2.3.3. Promenljivo pravolinijsko kretanje tačke

U opštem slučaju brzina se kod pravolinijskog kretanja menja u zavisnosti od vremena tj. $v \neq \text{const.}$

Neka u trenutku t_1 pokretna tačka ima brzinu v_1 , a u trenutku t_2 brzinu v_2 . Ako je $v_2 > v_1$, onda je priraštaj brzine $\Delta v = v_2 - v_1$ u toku vremena $\Delta t = t_2 - t_1$.

Srednje ubrzanje pravolinijskog kretanja je odnos priraštaja brzine (Δv) i odgovarajućeg vremenskog intervala (Δt):

$$a_{sr} = \Delta v / \Delta t$$

Ako vremenski interval Δt teži nuli dobija se granična vrednost koja se naziva ubrzanje **a (acceleratio)**.

Ubrzanje je vektorska veličina, a osnovna jedinica je m/s^2 .

Vektori brzine i ubrzanja su kolinearni (isti pravac), a smer zavisi od toga da li se radi o ubrzano ili usporenom pravolinijskom kretanju.

Na osnovu ubrzanja može se zaključiti o vrsti pravolinijskog kretanja na sledeći način:

- **ako je $a=0 \rightarrow$ jednoliko kretanje**
- **ako je $a=\text{const.} \rightarrow$ jednako promenljivo kretanje**
 - A) $a>0 \rightarrow$ jednakoubrzano**
 - B) $a<0 \rightarrow$ jednakousporeno**
- **ako je $a \neq \text{const.} \rightarrow$ nejednako promenljivo kretanje**

A) Jednakoubrzano pravolinijsko kretanje tačke

To je kretanje tačke po pravolinijskoj putanji pri kojem se brzina tačke povećava uvek za istu vrednost u svakoj sledećoj jedinici vremena.

Vrednost za koju se povećava brzina je ubrzanje a .

Opšti obrazac za izračunavanje brzine tačke je:

$$\mathbf{v=v_0+at}$$

gde je v_0 početna brzina. Iz ove j-ne mogu se izvesti neke druge j-ne u zavisnosti šta je poznato, a šta se traži:

- Početna brzina tačke: $v_0=v-at$
- Vreme kretanja tačke: $t=(v-v_0)/a$
- Ubrzanje tačke $a=(v-v_0)/t$

Srednja brzina ovog kretanja :

$$v_{sr} = s/t = (v_0 + v)/2$$

Pomoću srednje brzine može se odrediti put koji će tačka preći u toku vremena t:

$$s = v_{sr} \cdot t = (v_0 + v) \cdot t / 2$$

Korišćenjem obrasca za brzinu i ubacivanjem u izraz za put sledi:

$$s = [v_0 + (v_0 + at)] t / 2 = (2v_0 + at)t / 2$$

$$\rightarrow \mathbf{s = v_0 t + at^2 / 2}$$

Ako je tačka prešla i neki početni put s_0 onda je:

$$s = s_0 + v_0 t + at^2 / 2$$

Ostali obrasci u upotrebi:

$$\mathbf{v^2 - v_0^2 = 2as}$$

Kada tačka kreće iz stanja mirovanja ($v_0 = 0$) osnovne kinematičke jednačine su:

$$\mathbf{v = at, \quad s = at^2 / 2, \quad v^2 = 2as}$$

A) *Jednakousporeno pravolinijsko kretanje tačke*

To je kretanje tačke po pravolinijskoj putanji pri kojem se brzina tačke smanjuje uvek za istu vrednost u svakoj sledećoj jedinici vremena.

Vrednost za koju se smanjuje brzina je usporenje a . Ovo kretanje **mora imati početnu brzinu v_0** (to je najveća brzina kretanja tačke)

Opšti obrazac za izračunavanje brzine tačke je:

$$\mathbf{v=v_0-at}$$

gde je v_0 početna brzina. Iz ove j-ne mogu se izvesti neke druge j-ne u zavisnosti šta je poznato, a šta se traži:

- Početna brzina tačke: $v_0=v+at$
- Vreme kretanja tačke: $t=(v_0-v)/a$
- Usporenje tačke $a=(v_0-v)/t$
- Vreme zaustavljanja **$t_k=v_0/a$** (krajnja brzina $v=v_k=0$)

Srednja brzina ovog kretanja :

$$v_{sr} = (v_0 + v) / 2$$

Pomoću srednje brzine može se odrediti put koji će tačka preći u toku vremena t:

$$s = v_{sr} \cdot t = (v_0 + v) \cdot t / 2$$

Korišćenjem obrasca za brzinu i ubacivanjem u izraz za put sledi:

$$s = [v_0 + (v_0 + at)] t / 2 = (2v_0 + at)t / 2$$

$$\rightarrow \mathbf{s = v_0 t - at^2 / 2}$$

Ako je tačka prešla i neki početni put s_0 onda je:

$$s = s_0 + v_0 t - at^2 / 2$$

Ostali obrasci u upotrebi:

$$\mathbf{v_0^2 - v^2 = 2as}$$

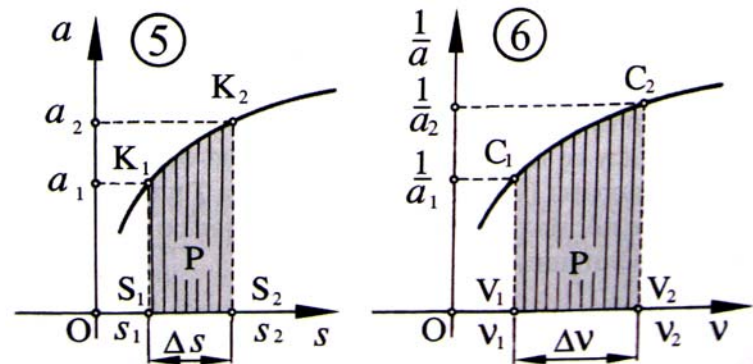
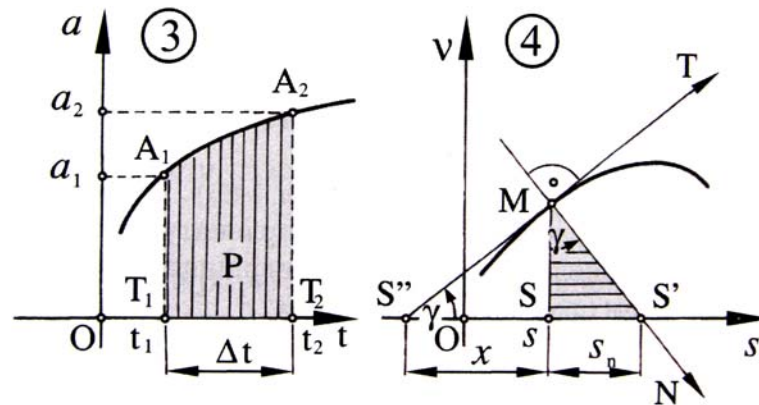
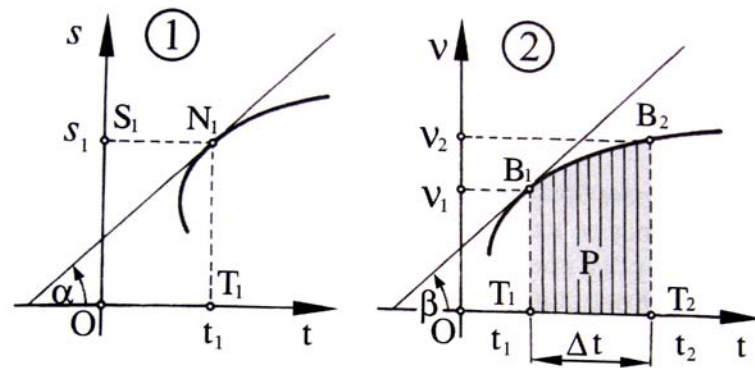
Put zaustavljanja (kočenja): $\mathbf{s_k = v_0^2 / 2a}$

2.4.Kinematički dijagrami

Ovi dijagrami grafički prikazuju zakone promene kinematičkih veličina (s, v, a) u zavisnosti od vremena (t) ili od drugih elemenata kretanja. Crtaju se uglavnom u Dekartovom pravouglojnom sistemu u ravni.

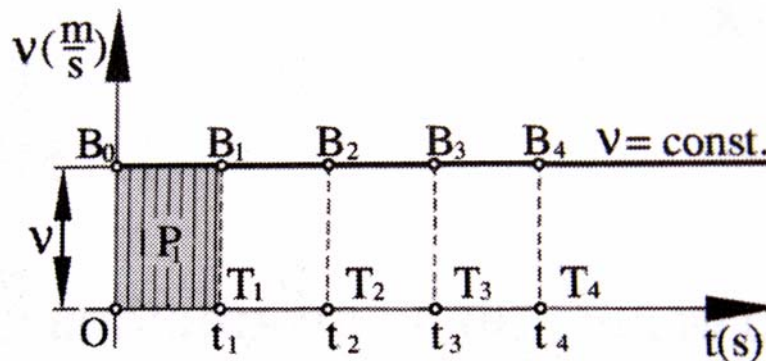
U tehničkoj praksi primenjuje se šest kinematičkih dijagrama:

1. puta i vremena (s, t)
2. brzine i vremena (v, t)
3. ubrzanja i vremena (a, t)
4. brzine i puta (v, s)
5. ubrzanja i puta (a, s)
6. recipročnog ubrzanja i puta ($1/a, v$)

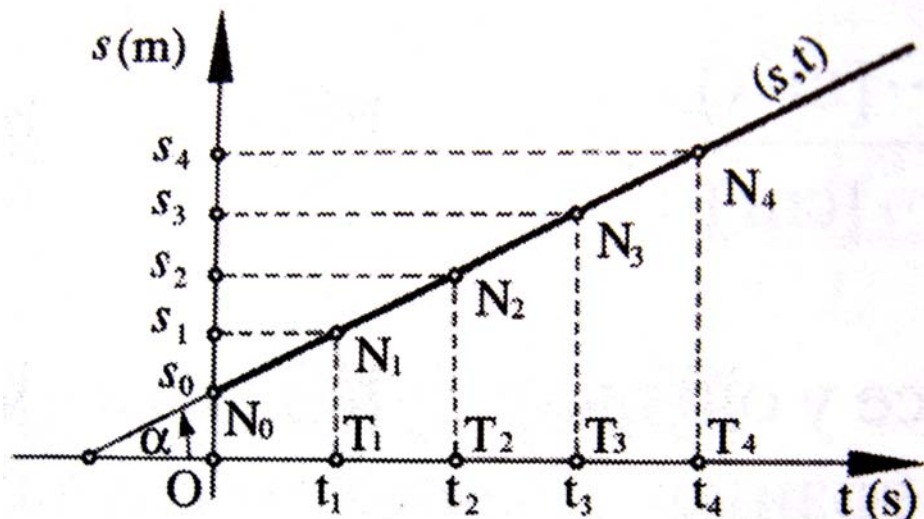


Kinematički dijagrami jednolikog pravolinijskog kretanja tačke

1. dijagram (v, t)

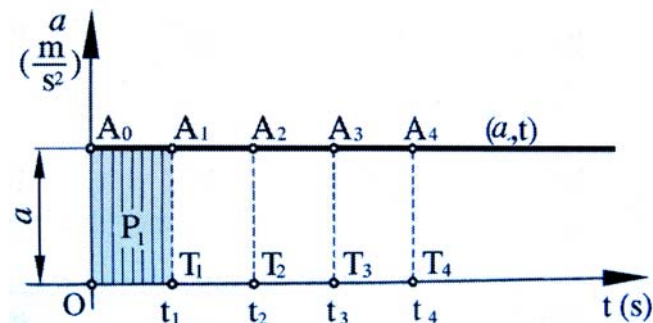


2. dijagram (s, t)

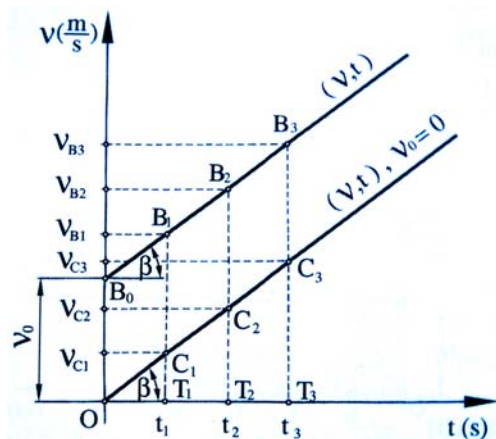


Kinematički dijagrami jednakoubrzanog pravolinijskog kretanja tačke

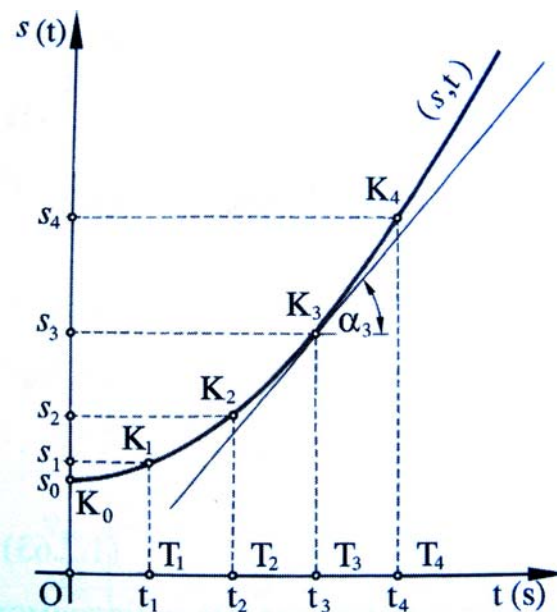
1. dijagram (a,t)



2. dijagram (v,t)



3. dijagram (s,t)



Kinematički dijagrami jednakosporenog pravolinijskog kretanja tačke

1. dijagram (a,t)
2. dijagram (v,t)
3. dijagram (s,t)

